3C 行列9日

nを自然数とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) aを0でない実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$とする。$A^2$, A^3, A^4を求めよ。

(2) 上の行列Aに対して，(1)の結果からA^nを推定し，その推定が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$とする。$P$の逆行列$P^{-1}$および$P^{-1}BP$を求めよ。

(4) 上の行列Bに対してB^nを求めよ。

〔山形大〕

(1)
$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

(2)
$A^n = \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ と予測できる　$n=1$のとき $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で成り立つ

$n=k$で $A = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ が成り立つとすると　$n=k+1$のとき

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k + ka^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となり　$n=k+1$のときも成り立つ　よって　数学的帰納法により証明できた.

(3)
$P^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\because (P^{-1}BP)^n = P^{-1}B^nP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^n = P \cdot P^{-1}B^nPP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} + 2^{n+1} \\ -2^n & -n2^{n-1} - 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n \cdot 2^{n-1} + 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -n \cdot 2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}$$