



47319



2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$ において, B は逆行列をもち, $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする。

- (1) $A^2 = E$ (単位行列) となることを示せ。
- (2) a, b, c, d を求めよ。

[群馬大]

(1) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$(B^{-1}AB)^2 = B^{-1}A^2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

つまり $B^{-1}A^2B = E$ $BB^{-1}A^2BB^{-1} = BEB^{-1}$
 $A^2 = BEB^{-1} = BB^{-1} = E$ $A^2 = E$

(2)

41-112117 > n 定理より

$A^2 - (1+b)A + (b - a^2 - a)E = 0$ より $A^2 - E = 0$ とおくと
係数比較して

$$1+b=0 \quad b - a^2 - a = -1$$

$\therefore b = -1 \quad a^2 + a = 0 \quad a(a+1) = 0 \quad a = 0, -1$ となり

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$... ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$... ②

① のとき

$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $BB^{-1}AB = B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1+c & 1+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -c & d \end{pmatrix} \quad c = -2, d = 0$

よって $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ は逆行列を持つ

② のとき

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-c & -1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -c & d \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない

数楽 <http://www.mathtext.info/>

よって $a = 0, b = -1, c = -2, d = 0$

