区/万5

閉区間 $[1, 2]$ を n 個の小区間に等分して, その小区間の端点を左から順に $1 = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = 2$ とおくとき, 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + (n-k+1)x_k + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}$$

〔弘前大〕

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$ なので

$$(n-k+1)x_k = (n-k+1)\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{\overset{n^2-k^2}{(n-k)(n+k)} + n + k}{n}$$

$$= n + 1 + \frac{k}{n} - \frac{k^2}{n}$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$= 1 + \underline{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x\,dx} - \int_0^1 x^2\,dx$$

$\frac{1}{n}$

これがいまいちよくわからんな〜

$$= 1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{2}{3}}$$