区分6

$\frac{1}{n^3}$ ぬけ

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2\right\}\cdots(A)$ とおく。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を求めよ。

(2) (1) の結果を用いて, (A) の値を求めよ。

(3) (A) を定積分を用いて表し, その値を計算せよ。

〔秋田大〕

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

(2)

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(2n+1)\{2(4n+1)-(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$$
$$=\frac{1}{6}(14n^3+9n^2+n)$$

これより

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(14+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\underline{\frac{7}{3}}$$

(3)

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1+x)^2dx=\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_0^1=\underline{\frac{7}{3}}$$