〔60分〕

$x>0$ のとき, 次の極限値

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n+x}+\frac{x}{n+2x}+\frac{x}{n+3x}+\cdots+\frac{x}{n+nx}\right)$$

を求め, この $f(x)$ と $2\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ との大小関係を判定せよ。 〔電通大〕

$$f(x)=\frac{x}{n}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+x}+\frac{n}{n+2x}+\frac{n}{n+3x}+\cdots+\frac{n}{n+nx}\right)$$

$$=\frac{x}{n}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{nx}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}x}$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt$$

$$=\Big[\log|1+t|\Big]_0^x$$

$$=\log(1+x)$$

ここで $g(x)=2(\sqrt{x+1}-1)-\log(1+x)$ とすると

$g(0)=0$

$$g'(x)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-\frac{1}{1+x}$$

$(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}-1}{1+x}\quad\cdots①$$

ここで $x>0$ であるから ① は常に正となる

∴ $g'(x)$ は $x>0$ において $g'(x)>0$

従って $g(x)\geqq 0$ であるから

$2(\sqrt{x+1}-1)>f(x)$ である。