次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}$$

〔学習院大〕

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots ①$

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 \cdots ②$

$(2n-1)^2 = 4n^2-4n+1$ より ②は

$4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n$

$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$

$= \frac{2}{3}n(n+1)\{(2n+1)-3\} + n$

$= \frac{4}{3}n(n+1)(n-1) + n$

$= \frac{4}{3}(n^3-n) + n = \frac{4}{3}n^3 - \frac{4}{3}n + n = \frac{1}{3}n(4n^2-1) \cdots ③$

与式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(4n^2-1)}$　分子分母を n^3 でわると

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1\cdot\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$