

極限 17 ②

関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$ ($x \neq 0$) について、次の問に答えよ。

- (1) $f(-1)$ を求めよ。
- (2) $f(1)$ を求めよ。
- (3) $0 < |x| < 1$ のとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (4) $1 < |x|$ のとき、 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} - (-1)^{-2n}}{(-1)^{2n} + (-1)^{-2n}} = 0$

(2) $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n} - 1^{-2n}}{1^{2n} + 1^{-2n}} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}}{x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{4n} - 1}{x^{4n} + 1}$

$0 < |x| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{4n} = 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{4n} - 1}{x^{4n} + 1} = -1$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{4n} - 1}{x^{4n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^{4n}}}{1 + \frac{1}{x^{4n}}} = 1$

$|x| > 1$ のとき