次の等式が成り立つような a, b の値を求めよ。

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1} = 1$$

分母 $x \to 1$ のとき 0 なので

分子も $x \to 1$ のとき 0 となる

このことから

$\sqrt{1+a}+b=0$ より $b=-\sqrt{1+a}$ となり与式へ代入すると

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}$$

分子の有理化!

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{1+a}}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{1+a}} = 1$$

$$1 = 16(1+a)$$

$$16a = -15$$

$$a = -\frac{15}{16}$$

$$b = -\sqrt{1-\frac{15}{16}} = -\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$$

$\therefore \; a = -\frac{15}{16} \quad b = -\frac{1}{4}$