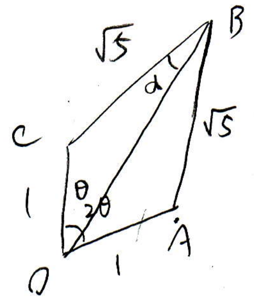
凸四辺形 OABC において, OA=OC=1, AB=BC= $\sqrt{5}$, $\angle AOC = 2\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ である。

(1) OB を θ で表せ。 (2) 四辺形 OABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

〔大阪電通大〕

(1)



正弦定理を使う. $\angle BOC=\theta$ $\angle CBO=\alpha$ とおくと.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{OB}{\sin(180^\circ-\theta-\alpha)}=\frac{OB}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5}} \qquad OB=\frac{\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}$$

$$OB=\frac{\sqrt{5}(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta)}{\sin\theta} \qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{5-\sin^2\theta}{5}}$$

$\because \cos\alpha>0$

$$\therefore OB=\frac{\sqrt{5}\left(\sin\theta\sqrt{\frac{5-\sin^2\theta}{5}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$OB=\sqrt{5-\sin^2\theta}+\cos\theta$$

(2)

$$S(\theta)=2\cdot\triangle OBC=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\sqrt{5-\sin^2\theta}+\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore S(\theta)=\sin\theta\left(\sqrt{5-\sin^2\theta}+\cos\theta\right)$$

(3)

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta\left(\sqrt{5-\sin^2\theta}+\cos\theta\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\left(\sqrt{5-\sin^2\theta}+\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{5}+1$$