極限30

$\frac{x}{x^{n-1}}$

関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}a+bx-cx^n}{1+3^{n-1}+x^{n-1}}$ は, 実数全体で定義され, かつ $f(-3)=3$ である。ただし, n は自然数とする。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

〔宮崎大〕

(1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{x}\right)^{n-1}a+\frac{b}{x^{n-2}}-cx}{\frac{1}{x^{n-1}}+\left(\frac{3}{x}\right)^{n-1}+1}$

これを $f(-3)$ とすると $f(-3)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}a+\frac{b}{(-3)^{n-2}}+3c}{\frac{1}{(-3)^{n-1}}+(-1)^{n-1}+1}$ …①

①の分母に $(-1)^{n-1}$ があるので分母と分子は約分できる.

①の右辺を整理すると

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{3b}{(-3)^{n-1}}+(-1)^{n-1}\cdot a+3c}{\frac{1}{(-3)^{n-1}}+(-1)^{n-1}+1}=3$ より

$-3b=a=3c=3$ となる

よって $a=3,\ b=-1,\ c=1$

(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n-x-x^n}{1+3^{n-1}+x^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\left\{1-\frac{x}{3^n}-\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3^{n-1}}+1+\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}}$

$\left|\frac{x}{3}\right|<1$ のとき つまり $|x|<3$ のとき $f(x)=3$

$\frac{x}{3}=1$ のとき $x=3$ のとき $f(x)=0$

$\left|\frac{x}{3}\right|>1$ のとき. $|x|>3$ のとき. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\left\{\left(\frac{3}{x}\right)^n-\frac{1}{x^{n-1}}-1\right\}}{\frac{3}{x^n}+\left(\frac{3}{x}\right)^n+\frac{3}{x}}=\dfrac{-3}{\frac{3}{x}}=-x$