極限32

a を正の定数とし,

$$S_n = \frac{a}{1+a} + \frac{a^2}{1+a^2} + \cdots\cdots + \frac{a^n}{1+a^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とするとき,

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ の値を求めよ。

(2) $1 \leqq a$ のとき, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ を示せ。

(3) $0 < a < 1$ のとき, $S_n < \frac{a}{1-a}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

〔武蔵工大〕

(1) ① $0<a<1$ aとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = 0$$

② $a=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

③ $a>1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}+1} = 1$$

(2)

$$\frac{a^k}{1+a^k} - \frac{a}{1+a} = \frac{a^k(1+a) - a(1+a^k)}{(1+a^k)(1+a)} = \frac{a^k - a}{(1+a^k)(1+a)} \geqq 0$$

つまり

$$\frac{a^k}{1+a^k} \geqq \frac{a}{1+a}$$ となり

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^3}{1+a^3} + \cdots + \frac{a^n}{1+a^n} \geqq \frac{na}{1+a}$$ であるから

$$S_n \geqq \frac{na}{1+a}$$

ここで $\lim_{n\to\infty} \frac{na}{1+a} = \infty$ より

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ である

(3) $0<a<1$ なら $k=1, 2, 3, \cdots, n$ に対して

$\frac{a^k}{1+a^k} < a^k$ よって $S_n < \sum_{k=1}^{n} a^k$ となるので

$$\lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a}{1-a}$$

従って

$$S_n < \frac{a}{1-a}$$