

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{ax^2 + 1})$  が存在するとき、定数  $a$  の値は  である。  
 [神奈川大]

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{ax^2 + 1} \\ = & \frac{x^2(1-a) + ax}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{ax^2 + 1}} = \frac{x\{x(1-a) + a\}}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{ax^2 + 1}} \\ = & \frac{x(1-a) + a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{a + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{①} \end{aligned}$$

この式では  $x \rightarrow \infty$  とすると ① は  $\infty$  に発散してしまうので

分子の  $x(1-a)$  が  $x$  に依らず  $0$  になる必要がある

$$\therefore 1-a=0$$

$$\text{ゆえに } a=1$$