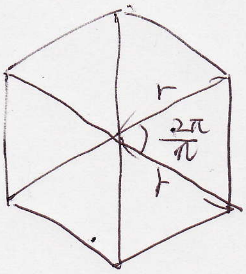
面積１の正 n 角形 $(n \geqq 3)$ の周の長さを $L(n)$ とする。

(1) $L(n)$ を n の式で表わせ。

(2) $\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。

〔津田塾大〕

(1)



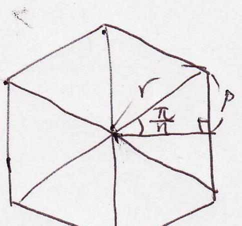
面積

正n角形が円に内接するその円の半径をrとする。またとなり合う2つの頂点と中心を結んでできる角の大きさは $\frac{2\pi}{n}$ と表されることから面積Sは

$S=\left(\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)n$ と表され これが1であることから

$\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}=1$ …① となる

周の長さは 先の円の中心から正n角形の1辺におろした垂線によって2等分された1辺の半分をpとすると



$p=r\sin\frac{\pi}{n}$ となり 1辺は2pであるから

周の長さは $2pn$ となる。よって

$L(n)=2nr\sin\frac{\pi}{n}$ …②

①より $r=\sqrt{\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}}$ を②に代入して

$L(n)=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}}$ 倍角の公式より

$=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{2}{2n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}}$

$=2\sqrt{\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}$ これより $L(n)=2\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}$ //

(2) $\theta=\frac{\pi}{n}$ とすると $n=\frac{\pi}{\theta}$ ∵ $n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$

$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n\tan\frac{\pi}{n}}=\lim_{\theta\to 0} 2\sqrt{\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to 0} 2\sqrt{\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\pi}{\cos\theta}}=2\sqrt{\pi}$ //