

極限50

次の関係が成り立つような定数  $a, b, c$  を求めよ。  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \sqrt{x^2 + 3x + 1} - (ax + b) \right\} = c$   
 [琉球大]

$$\begin{aligned} & x \left\{ \sqrt{x^2 + 3x + 1} - (ax + b) \right\} \\ &= \frac{x \left\{ x^2 + 3x + 1 - (ax + b)^2 \right\}}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + (ax + b)} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1 - ax^2 - 2abx - b^2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + a + \frac{b}{x}} \\ &= \frac{x^2(1-a) + (3-2ab)x + 1 - b^2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + a + \frac{b}{x}} \end{aligned}$$

∴ 分母は  $x \rightarrow \infty$  に  $\infty$  に近づく。分子は  $\infty$  に近づく。  
 $x^2$  や  $x$  の係数が  $0$  に近づくならば  $x \rightarrow \infty$  としても分母は収束するので、それは  $C$  に収束する。

$$\begin{aligned} \therefore & 1 - a = 0, \quad 3 - 2ab = 0 \text{ より} \\ & a = 1, \quad b = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

∴  $c$  とは

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{3}{2x}} = -\frac{5}{8} = c$$

よって

$$a = 1, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = -\frac{5}{8}$$