極限51

訂正あり 2ヶ所

t

曲線 $y=\sqrt{4-x}$ を C とする。$2 \leqq x \leqq 3$ を満たす t に対して, 曲線 C 上の点 $(t, \sqrt{4-t})$ と, $(0,\ 0)$ および $(t,\ 0)$ の 3 つの点を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) t が $2 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, 関数 $S(t)$ の最大値, 最小値, およびそのときの t の値を求めよ。

(2) 区間 $[2,\ 3]$ を n 等分して, その端点と分点を小さいほうから順に $t_0=2, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n=3$ とする。

極限値

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)$ を求めよ。

〔茨城大〕

(1)

$2 \leqq t \leqq 3$ より $\sqrt{4-t}>0$

$S(t)=\frac{1}{2}\left|t\sqrt{4-t}-t\cdot 0\right|$ 　$t\sqrt{4-t}>0$ より

$S(t)=\frac{1}{2}t\sqrt{4-t}$ となる

$S'(t)=\frac{1}{2}\sqrt{4-t}+\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-t}}\cdot(-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(4-t)-t}{2\sqrt{4-t}}$

$=\frac{8-3t}{4\sqrt{4-t}}$

t	2	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	3
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$	$\sqrt{2}$	↗	極大	↘	$\frac{3}{2}$

増減表をかくと左のようになり

$S(t)$ は $t=\frac{8}{3}$ で極大かつ最大値をとる

$S\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{9}\sqrt{3}$

よって 最大値は $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ ($t=\frac{8}{3}$ のとき), 最小値は $\sqrt{2}$ ($t=2$ のとき)

(2)

与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S\left(2+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}(2+x)\sqrt{2-x}\,dx$ …① ここで $\sqrt{2-x}=u$ とおくと

$2-x=u^2$ 　$-dx=2u\,du$ 　$dx=-2u\,du$ 　$x=2-u^2$

$x:0\to 1$ 　$u^2:2\to 1 \Rightarrow u:\sqrt{2}\to 1$

より ①は

$①=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{2}(2+2-u^2)\,u\cdot -2u\,du=\int_1^{\sqrt{2}}u^2(4-u^2)\,du$

$=\left[\frac{4}{3}u^3-\frac{u^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{28}{15}\sqrt{2}-\frac{17}{15}$