接限55

x 上の定点 $\mathrm{A}(a,\,0)$ から曲線 $y=xe^{-x}$ に接線が 2 本引けるとき, これらの接線を $l,\,m$ とし, l の接点を $\mathrm{B}(b,\,be^{-b})$, m の接点を $\mathrm{C}(c,\,ce^{-c})$ とする。ただし, $b<c$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) b を a の関数で表せ。さらに, $a\to\infty$ のとき, b の極限値を求めよ。

〔広島大〕

$$y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

関数 $y=xe^{-x}$ 上の点を $(t,\ xe^{-t})$ とするとこの点における接線の式は

$$y=e^{-t}(1-t)(x-t)+te^{-t}$$

整理して

$$y=e^{-t}(1-t)x+t^2e^{-t}\ \cdots ①$$

これが $(a,0)$ を通るので $x=a$, $y=0$ を ①に代入すると

$$e^{-t}(1-t)a+t^2e^{-t}=0 \qquad e^{-t}>0 \text{ より}$$

両辺 e^{-t} で割って

$t^2-at+a=0$ となるこれが2つの実数解をもてばよいので判別式 $D>0$ が条件となる

$$a^2-4a>0$$
$$a(a-4)>0 \qquad \underline{a>4 \text{ または } a<0}$$

$t^2-at+a=0$ より

$$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2} \qquad b<c \text{ より} \qquad b=\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2-(a^2-4a)}{2(a+\sqrt{a^2-4a})}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{4a}{2(a+\sqrt{a^2-4a})}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{4}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{a}}\right)}=\frac{4}{2\times2}=1$$

$\underline{1}$