3C 極限 6

a を正の数とする。座標平面上で, 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ で表される曲線 $C: y=f(x)$ を考える。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ における接線を l とする。接線 l と y 軸との交点を A, x 軸との交点を B とするとき, 原点 O と 2 点 A, B からなる三角形 OAB の面積を求めよ。

(3) (2) で定めた三角形 OAB の面積を $S(a)$ とするとき, $\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ。

〔茨城大〕

(1)
$$f'(x)=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

て増減表は以下のよう

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

∴ $f(x)$ は $x=1$ のとき極大値 1 をとる

(2)
$$l: y=-\frac{a}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}(x-a)+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$ を整理すると

$$y=-\frac{a}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}x+\frac{2a^2+1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}$$ となり、これより A、B の座標を

求めると $A\left(0,\ \dfrac{2a^2+1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}\right)$, $B\left(\dfrac{2a^2+1}{a},\ 0\right)$

∴ △OAB の面積は $\dfrac{2a^2+1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}\cdot\dfrac{2a^2+1}{a}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{(2a^2+1)^2}{2a(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}$

∴ $\underline{\dfrac{(2a^2+1)^2}{2a(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}}$ //

(3)
$$\lim_{a\to\infty}\frac{(2a^2+1)^2}{2a(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{a^2}\right)^2}{2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}=\frac{4}{2}=2$$

分子分母 ÷ a^4

$\underline{2}$ //