極限7

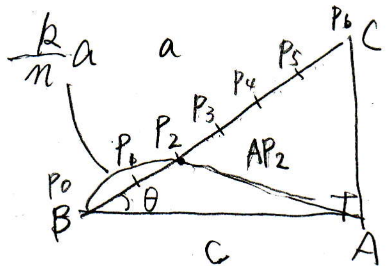
直角三角形 ABC の斜辺 BC を n 等分して，その分点を順に $\mathrm{B}=\mathrm{P}_0$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{k-1}, P_k, $\cdots$, P_{n-1}, $\mathrm{P}_n=\mathrm{C}$ とおく。

(1) $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき，AP_k^2 を a, c, n および k で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\mathrm{AP}_1^2+\mathrm{AP}_2^2+\cdots+\mathrm{AP}_n^2\right)$ を求めよ。

〔滋賀県立大〕

(1)



$$\cos\theta=\frac{c}{a}$$

$\triangle \mathrm{AP}_k\mathrm{B}$ で余弦定理を用いると

$$\mathrm{AP}_k^2=c^2+\left(\frac{k}{n}a\right)^2-2c\cdot\frac{k}{n}a\cos\theta$$

$$=c^2+\frac{k^2}{n^2}a^2-2c\cdot\frac{k}{n}\cancel{a}\cdot\frac{c}{\cancel{a}}$$

$$\therefore\ \mathrm{AP}_k^2=\frac{k^2}{n^2}a^2+c^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k^2}{n^2}a^2+c^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+c^2n-\frac{2c^2}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}+c^2-\frac{c^2(n+1)}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}+c^2-c^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{a^2}{3}+c^2-c^2$$

よって $\dfrac{a^2}{3}$