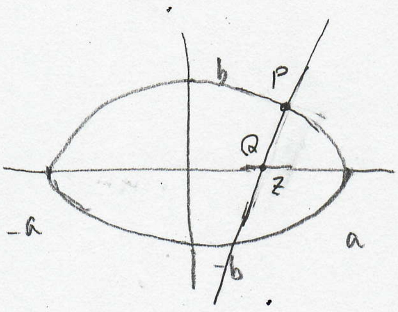
GOOD JOB!

GOOD JOB!

極限9

楕円C : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上のx軸にない点PにおけるCの法線lとx軸の交点をQ(z, 0) とする。x軸にない点PがC上を動いて点A(a, 0) に限りなく近づくとき, zの極限値を求めよ。ただし, PにおけるCの法線とはPを通りPにおけるCの接線と直交する直線のことである。 〔学習院大〕



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{a^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

ここで点Pの座標は P($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) と表せるから

点Pにおける法線lは

$$y=\frac{a^2b\sin\theta}{ab^2\cos\theta}(x-a\cos\theta)+b\sin\theta$$ で整理すると

$$y=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}x-\frac{a^2}{b}\sin\theta+b\sin\theta$$

ここで $y=0$ とおいてxを求めると

$$\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}x=\frac{a^2}{b}\sin\theta\quad b\sin\theta$$

$$x=a\cos\theta-\frac{b^2}{a}\cos\theta=z$$

ここでAが(a, 0)に近づくことは
$\theta\to 0$ になることなので

つまり $z=a\cos\theta-\frac{b^2}{a}\cos\theta$

ここでAが$(a, 0)$に近づくことは
$\theta\to 0$ になることと同じなので

$$\lim_{\theta\to 0} z=\lim_{\theta\to 0} a\cos\theta-\frac{b^2}{a}\cos\theta$$

$$=a-\frac{b^2}{a}$$

GOOD JOB!

GOOD JOB!

$$\therefore a-\frac{b^2}{a}$$