2013 愛知教大後期

(1)

$a_1=1,\ b_1=1$

$n=1$ のとき

$a_2=a_1+b_1 \qquad b_2=2a_1+b_1$

$=2 \qquad\qquad\qquad =2+1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad =3$

$n=2$ のとき

$a_3=a_2+b_2 \qquad b_3=2a_2+b_2$

$=2+3$ より $\qquad =4+3$ より

$a_3=5 \qquad\qquad b_3=7$

$n=3$ のとき

$a_4=a_3+b_3 \qquad b_4=2a_3+b_3$

$=5+7$ より $\qquad =10+7$ より

$a_4=12 \qquad\qquad b_4=17$

$n=4$ のとき

$a_5=a_4+b_4 \qquad b_5=2a_4+b_4$

$=12+17$ より $\qquad =24+17$ より

$a_5=29 \qquad\qquad b_5=41$

$n=5$ のとき

$a_6=a_5+b_5 \qquad b_6=2a_5+b_5$

$=29+41$ より $\qquad =58+41$ より

$a_6=70 \qquad\qquad b_6=99$

(2) $n=1$ のとき

$a_1 \geqq 1 \qquad 1=1$ で成り立つ

$n=k$ のとき

$a_k \geqq n$ が成り立つとすると

$n=k+1$ のとき

$a_{k+1}=a_k+b_k \geqq k+b_k$ であり

b_k が1以上の整数であることは $\{a_n\},\{b_n\}$

の設定よりわかる

よって $\quad a_{k+1} \geqq k+1$ がいえる

したがって $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より すべての自然数について

$a_k \geqq n$ がいえる.

(3)

$a_1^2=1 \qquad b_1^2=1 \to 2a_1^2=2-b_1^2=1 \to 1$

$a_2^2=4 \qquad b_2^2=9 \to 2a_2^2=8-b_2^2=9 \to -1$

$a_3^2=25 \qquad b_3^2=49 \to 2a_3^2=50-b_3^2=49 \to 1$

$a_4^2=144 \qquad b_4^2=289 \to 2a_4^2=288-b_4^2=289 \to -1$

$a_5^2=841 \qquad b_5^2=1681 \to 2a_5^2=1682-b_5^2=1681 \to 1$

$\vdots$

$$2a_n^2-b_n^2=(-1)^{n-1}$$

$n=1$ のとき

左辺 $2a_1^2-b_1^2=2-1=1$

右辺 $(-1)^0=1$

で成り立つ

$n=k$ のとき $2a_k^2-b_k^2=(-1)^{k-1}$ が成り立つ

とすると

$n=k+1$ のとき

$2a_{k+1}^2-b_{k+1}^2$

$=2(a_k+b_k)^2-(2a_k+b_k)^2$

$=2(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)-(4a_k^2+4a_kb_k+b_k^2)$

$=-2a_k^2+b_k^2$

$=(-1)(2a_k^2-b_k^2)$

$=(-1)(-1)^{k-1}$

$=(-1)^{(k+1)-1}$ となり $n=k+1$ でも成り立つ.

よって $2a_n^2-b_n^2=(-1)^{n-1}$ が成り立つ.

(4) $2a_n^2-b_n^2=(-1)^{n-1}$ の両辺を a_n^2 でわると

$2-\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2=\dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n^2}$ …①

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ なので ①の極限をとると

$\lim\limits_{n\to\infty} 2-\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n^2}=0$

つまり

$2-\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2=0$ より

$\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2=2 \quad a_n>0,\ b_n>0$ より $\dfrac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}$ //