2013 金沢大

(1) $n \geqq 3$ 1個のサイコロをn回振る.

6の目がちょうど2回で連続で出る確率 P_n

P_3

$$2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{108}\cdots P_3$$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2$ $\frac{5}{6}$

P_4

$$3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{432}\cdots P_4$$

(2) n回

$\underbrace{1つ \cdots}_{n-1\text{個}}$

$$P_n={}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$P_n=(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

このとき

$$P_{n+1}-\frac{5}{6}P_n=n\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

よって題意は示された。

(3)

$S_n=P_3+P_4+\cdots P_n$ を求めると

$$S_n=2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+4\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$-)\ \frac{5}{6}S_n=\qquad 2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdots+(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{6}S_n=2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{5}{36}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}$$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$

に分ける.

よって $\frac{1}{6}S_n=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{36}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}-(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$$S_n=\frac{5}{36}+\frac{5}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}-(n-1)\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{36}+\frac{5}{6}=\frac{5}{36}+\frac{30}{36}=\frac{35}{36}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{35}{36}$$