2013 静岡大 4

(1) $\frac{\pi}{12} < a_1 < \frac{\pi}{4}$ とし

$$a_{n+1} = 1 - \sin a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$1 - x = \sin x$ とし

$f(x) = 1 - x - \sin x$ とおく これは

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ において連続なので.

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{12 - \pi - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} > 0 \quad \cdots ①$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4 - \pi - 2\sqrt{2}}{4} < 0 \quad \cdots ②$$

また

$f'(x) = -1 - \cos x < 0$ より

$f(x)$ は 単調減少

これと①, ②より

$f(x)$ は $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ にただ1つの交点をもつ.

したがって 題意は満たされた.

(2)

$$a_2 = 1 - \sin a_1$$

$$\sin\frac{\pi}{12} < \sin a_1 < \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \sin a_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < -\sin a_1 < \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \sin a_1 < 1 + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\frac{\pi}{12} < \frac{2-\sqrt{2}}{2} < a_2 < \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} < \frac{\pi}{4}$ で成立つ

$n = k$ のとき

$\frac{\pi}{12} < a_k < \frac{\pi}{4}$ が成り立つとすると

$n = k+1$ のとき

$$\frac{\pi}{12} < a_{k+1} < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{12} < 1 - \sin a_k < \frac{\pi}{4} \quad \cdots ①$$

$\frac{\pi}{12} < a_k < \frac{\pi}{4}$ なので $\sin a_k$ は $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \sin a_k < \frac{\sqrt{2}}{2}$

このとき, $\sin a_k = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ のとき ①は,

$\frac{\pi}{12} < \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} < \frac{\pi}{4}$ であり

$\sin a_k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときも ①は

$\frac{\pi}{12} < \frac{2-\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$ である.

よって ①は $n = k+1$ のときも成り立つ.

以上より すべての自然数について成り立つ

よって

$\frac{\pi}{12} < a_n < \frac{\pi}{4}$ である.

$F(x) = 1 - \sin x$ とおくと

$a_{n+1} = F(a_n)$ とでき…①

$\alpha = F(\alpha)$ …② であり $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ である

①−② より

$a_{n+1} - \alpha = F(a_n) - F(\alpha)$ …③

また $a_n \neq \alpha$ として 平均値の定理より

$$\frac{F(a_n) - F(\alpha)}{a_n - \alpha} = F'(b_n)$$

つまり

$F(a_n) - F(\alpha) = F'(b_n)(a_n - \alpha)$ となる …④

b_n が a_n と α の間に存在する

ここで

$F'(x) = -\cos x$ で

b_n は $\frac{\pi}{12} < b_n < \frac{\pi}{4}$ を満たす

したがって
$|F'(b_n)| = \cos b_n < \cos\frac{\pi}{12}$ であるから

$\cos\frac{\pi}{12} = r$ とおくと

④は

$|F(a_n) - F(\alpha)| \leqq r|a_n - \alpha|$

③から

$|a_{n+1} - \alpha| \leqq r|a_n - \alpha|$ となる

これは初項 $a_1 - \alpha$ 公比 r の等~~比数~~列を表しており

$|a_n - \alpha| \leqq r^{n-1}|a_1 - \alpha|$ とかける

よって

$0 \leqq |a_n - \alpha| \leqq r^{n-1}|a_1 - \alpha|$ となり

$0 < r < 1$ であるから

$\lim_{n\to\infty} r^{n-1}|a_1 - \alpha| = 0$ である

したがって はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$