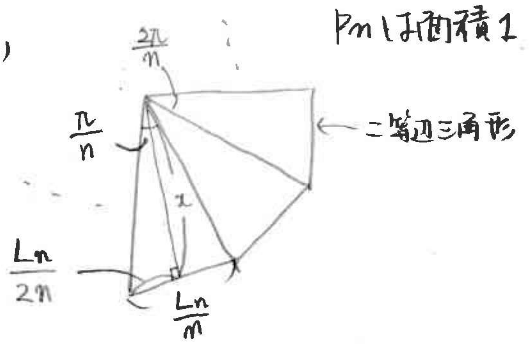
(1)

Pnは面積1　　　　2019 ワセダ



$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{L_n}{2n}}{x}$$

$$\therefore\ x = \frac{L_n}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

したがって二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{L_n}{n}\cdot\frac{L_n}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$ となりこれがn個集まった

ものが1だから

$$\frac{(L_n)^2}{4n^2\tan\frac{\pi}{n}}\cdot n = 1$$

したがって

$$(L_n)^2 = 4n\tan\frac{\pi}{n}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(L_n)^2 = \lim_{n\to\infty}4n\tan\frac{\pi}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}4\pi\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\ \cdots ①$$

$n\to\infty$ のとき $\frac{\pi}{n}\to 0$ なので

①は $$\lim_{n\to\infty}4\pi\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 4\pi$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}L_n = \sqrt{4\pi} = 2\sqrt{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}L_n = 2\sqrt{\pi}$$

(3)

(2)より

関数 $f(x) = 4\pi\frac{\tan x}{x}$ を考えると $(L_n)^2 = f\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

$3\leqq n < k$ のとき $\frac{\pi}{3}\geqq\frac{\pi}{n}>\frac{\pi}{k}>0$ であるから

$x_1 = \frac{\pi}{n}$　$x_2 = \frac{\pi}{k}$ とすると

$f(x_1) > f(x_2)$ であることを示せばよい

このことは $f(x)$ が $0<x\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲で

単調増加であることを示せばよい

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)x - \tan x\cdot 1}{x^2}\cdot 4\pi \times \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}\cdot 4\pi$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2x - 2\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2x - \sin 2x}{x^2\cos^2 x}$$

$x^2\cos^2 x > 0$ であり、

$g(x) = 2x - \sin 2x$ は

$g'(x) = 2 - 2\cos 2x$ より $0<x\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲で

$0 < g'(x) \leqq 1$ であるから $f'(x) > 0$

となり $f(x)$ は $0<x\leqq\frac{\pi}{3}$ で単調増加

である

よって

$(L_n)^2 > (L_k)^2$ がいえる