(1) $x-\sin x$ を $f(x)$ とおくと

$f'(x)=1-\cos x \geqq 0$

$f(0)=0$ であるから $f(x)\geqq 0$ $x\geqq 0$

$\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$ を $g(x)$ とおくと

$g(x)'=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

$g''(x)=x-\sin x=f(x)\geqq 0$ である

$g(0)=0$ より $g(x)\geqq 0$ である.

以上より $x\geqq 0$ のとき

$x-\frac{x^3}{6}\leqq \sin x\leqq x$

(2) (1)より $t\geqq 0$ のとき

$t-\frac{t^3}{6}\leqq \sin t\leqq t$

各辺に t $(t\geqq 0)$ をかけて

$t^2-\frac{t^4}{6}\leqq t\sin t\leqq t^2$

各辺 $[0,x]$ で積分すると

$\int_0^x\left(t^2-\frac{t^4}{6}\right)dt\leqq\int_0^x t\sin t\,dt\leqq\int_0^x t^2dt$

これより

$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}\leqq\int_0^x t\sin t\,dt\leqq\frac{x^3}{3}$

が成り立つ.

(3)

$\int_0^x t\sin t\,dt=\left[-t\cos t\right]_0^x+\int_0^x\cos t\,dt$

$=-x\cos x+\left[\sin t\right]_0^x$

$=\sin x-x\cos x$

よって(2)の結果より

$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}\leqq\sin x-x\cos x\leqq\frac{x^3}{3}$

各辺 $x>0$ として x^3 で割ると

$\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}\leqq\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\leqq\frac{1}{3}$

$\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ は偶関数なので

$x\to+0$ を求めればよい

$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}\right)=\frac{1}{3}$ より

はさみうちの原理から,

$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$.