曲線 $y = x^4 + \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{}$ は点 $(1, 8)$ を通り, $x = 2$ のとき極小値 $\boxed{}$ をとり, $x = \dfrac{\sqrt{\boxed{}} - 2}{2}$ のとき極大値になり, $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき変曲点をとる。

〔自治医大〕

$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ とおくと

$f(1) = a + b + c + 1 = 8$ 　　$a + b + c = 7$ …①

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$

$f'(2) = 0$ より 　　$32 + 4a + b = 0$ …②

$f''(x) = 12x^2 + 2a$ …③

$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ より 　$2x = \pm\sqrt{6}$ 　　$4x^2 = 6$ 　　$4x^2 - 6 = 0$ となるので

これと③より

$f''(x) = 3(4x^2 - 6) = 0$ …④ と変形でき, ③,④より 　$2a = -18$, $a = -9$

$a = -9$ と②より

$32 - 36 + b = 0$

$b = 4$

$a = -9$, $b = 4$ より 　　$-9 + 4 + c = 7$ 　　$c = 12$

以上より

$y = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

$f'(x) = 4x^3 - 18x + 4 = 2(2x^3 - 9x + 2)$

$= 2(x - 2)(2x^2 + 4x - 1)$ 　　$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2}}{2}$ 　　$x = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$

$f(2) = 16 - 36 + 8 + 12$

$f(2) = 0$ … 極小値

$f''\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right) = 12(1 - \sqrt{6}) < 0$

$f''\left(\frac{-\sqrt{6}-2}{2}\right) = 12(1 + \sqrt{6}) > 0$

$x = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$ のとき極大値 　となる