3C 曲線 13

訂正

xy 平面上において, 媒介変数 t を用いて $x=2\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)$, $y=t-\dfrac{1}{t}$ と表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を求め, その概形をかけ。

(2) 点 (a, 0) を通り曲線 C に接する直線があるような a の範囲と, そのときの接線の方程式をすべて求めよ。

〔筑波大〕

$x=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+2$ より

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}(x-2)$ …①

$y=t-\dfrac{1}{t}$ より

$t-\dfrac{1}{t}=y$ …②

$$\begin{cases} t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}x-1 & \cdots ① \\ t-\dfrac{1}{t}=y & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② から

$2t=\dfrac{1}{2}x+y-1$

$t=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}$ …③

① − ② より

$\dfrac{2}{t}=\dfrac{1}{2}x-y-1$

$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}$ …④

③ × ④ より

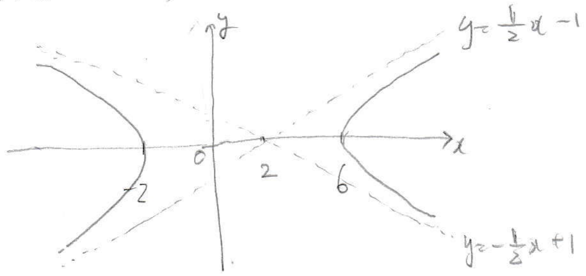
$1=\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}y^2$

∴ $\dfrac{(x-2)^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ …(i)

$\pm\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{2}$ より

$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x-1 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+1 \end{array}\right\}$ を漸近線にもつ

グラフは以下のよう



(2)

点 (a, 0) を通る接線の式を

$y=m(x-a)$ mは定数とすると

(1)の(i)より

$\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{m^2(x-a)^2}{4}=1$

$x^2-4x+4-4m^2x^2+8am^2x-4a^2m^2=16$

$(1-4m^2)x^2+4(2am^2-1)x-4a^2m^2-12=0$ …(ii)

これが重解をもてばよいので判別式 $D/4=0$ とすると

$4(2am^2-1)^2-(1-4m^2)(-4a^2m^2-12)=0$

$(2am^2-1)^2+(1-4m^2)(a^2m^2+3)=0$

$\cancel{4a^2m^4}-4am^2+1+a^2m^2+3-\cancel{4a^2m^4}-12m^2=0$

$m^2(a^2-4a-12)+4=0$

$m^2(a^2-4a-12)=-4$

ここで $m^2=\dfrac{-4}{a^2-4a-12}$ となり左辺は正であるから

$a^2-4a-12<0$ であることから

$(a-6)(a+2)<0$ ∴ $-2<a<6$ …①

また(ii)は二次方程式であることから

$1-4m^2\neq 0$ $m^2\neq\dfrac{1}{4}$ $\dfrac{-4}{a^2-4a-12}\neq\dfrac{1}{4}$

$a^2-4a-12\neq -16$

$a^2-4a+4\neq 0$

$(a-2)^2\neq 0$ …②

$a=-2, 6$ のときも $y=-2$, $y=6$ で可能である …③

①、②、③より

答 $\begin{cases} -2\leqq a<2,\ 2<a\leqq 6 \\ \text{接線の式は } a=-2 \text{ のとき } y=-2,\ a=6 \text{ のとき } y=6 \\ -2<a<2,\ 2<a<6 \text{ のとき } y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{-a^2+4a+12}}(x-a) \end{cases}$