曲線14

$x = \sqrt{\cos 2t}\cos t,\ y = \sqrt{\cos 2t}\sin t\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と媒介変数 t で表わされる曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) における y の最大値と, そのときの x を求めよ。

(2) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔北海道大〕

(1) yの最大値を考えるのなら $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ で十分

$y^2 = \cos 2t \sin^2 t$ 　　$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ より

$= (1 - 2\sin^2 t)\sin^2 t$

$= -2\sin^4 + \sin^2 t = -2\left(\sin^2 t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$ 　$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$

$\sin^2 t = \frac{1}{4}$ と tの範囲から $\sin t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{6}$ のとき y^2は最大値 $\frac{1}{8}$ をとる

このとき $x = \sqrt{\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$y^2 = \frac{1}{8}$ より tの範囲から $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ が求める最大値

以上より 　$x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき yの最大値は $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2)

曲線C上の極座標を(r, θ)とすると $r = \sqrt{\cos 2t}$, $\theta = t$

であり 求める面積は $-\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ より $\frac{1}{2}r^2$である.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$