曲線3　1/2

(1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフの概形をかけ。$\log x$ は自然対数である。$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに使てよい。

(2) 正の数 a に対して, $a^x = x^a$ となる正の数 x は何個あるか。

(3) e を自然対数の底, π を円周率とするとき, e^π と π^e とはどちらが大きいか。

〔滋賀医科大〕

(1) $y' = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$x = e$ で極値をとる

$y'' = \dfrac{-x - 2x(1 - \log x)}{x^4}$

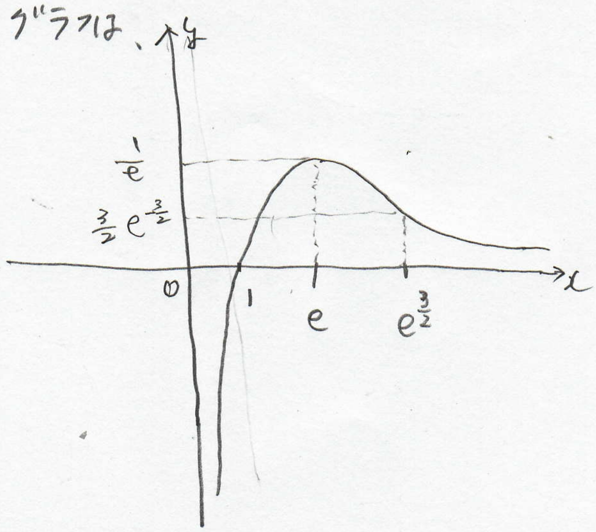
$= \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

変曲点は $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

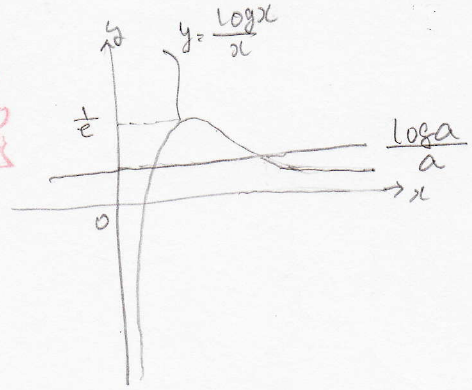
また $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$		
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

∴ グラフは、



(2)



$a^x = x^a$ の自然対数をとると

$x\log a = a\log x$

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$$

左図より $y=\frac{\log x}{x}$ と $y=\frac{\log a}{a}$ の交点の数が解の数となる

∴

$0<a\leqq 1$, $a=e$ のとき 1個

$1<a<e$, $a>e$ のとき 2個

(3)

$y=\frac{\log x}{x}$ は $x\geqq e$ で単調減少であるから

$e<\pi$ より

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$

$$\pi\log e > e\log \pi$$

$$\therefore\ e^{\pi} > \pi^{e}$$