曲線4

関数 $y=(ax^2+bx)e^{\frac{x}{a}}$ が次の2つの条件をみたすように整数 a, b を定めよ。

(ア) $x=x_0\ (1<x_0<1.7)$ で極値をとる。

(イ) 原点はこの関数の変曲点である。

〔愛媛大〕

$$y'=\frac{1}{a}(ax^2+bx)e^{\frac{x}{a}}+(2ax+b)e^{\frac{x}{a}}$$

$$=\left\{x^2+\left(\frac{b}{a}+2a\right)x+b\right\}e^{\frac{x}{a}}$$

$$y''=\frac{1}{a}\left\{x^2+\left(\frac{b}{a}+2a\right)x+b\right\}e^{\frac{x}{a}}+\left\{2x+\left(\frac{b}{a}+2a\right)\right\}e^{\frac{x}{a}}$$

$$=\left\{\frac{x^2}{a}+\left(\frac{b}{a^2}+4\right)x+2\left(\frac{b}{a}+a\right)\right\}e^{\frac{x}{a}}$$

原点が変曲点より $2\left(\frac{b}{a}+a\right)=0$ 　　$b=-a^2$ …①

このとき $y'=(x^2+ax-a^2)e^{\frac{x}{a}}$ となり xの解をもとめると

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{5}a}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}a \quad \cdots②$$

②が条件アより

$$1<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a<1.7 \quad \cdots③ \qquad 1<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<1.7 \quad \cdots④$$

となるので

③のとき $a=2$ でこのとき $b=-4$

④のとき $a=-1$ でこのとき $b=-1$

$\therefore$ $a=2, b=-4$, $a=-1, b=-1$