関数 $y = x^n\left(\log x - \dfrac{1}{n}\right)$ について, 次の問いに答えよ。ただし, n は1より大きい整数とする。

(1) y の最小値を求めよ。

(2) この関数のグラフは, 変曲点をもつことを示せ。

(3) n を限りなく大きくするとき, (2) の変曲点はある定点に限りなく近づくことを示せ。

〔島根大〕

(1) $f(x) = x^n\left(\log x - \frac{1}{n}\right)$ とおくと

$$f'(x) = nx^{n-1}\left(\log x - \frac{1}{n}\right) + \underbrace{x^n \cdot \frac{1}{x}}_{x^{n-1}}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}\log x \quad \cdots ①$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\log x + nx^{n-1}\cdot\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = nx^{n-2}\{(n-1)\log x + 1\} \quad \cdots ②$$

①より $\log x = 0$ となるとき $x = 1$ このとき $f''(x)$ は

$$f''(1) = n\cdot 1^{n-2}\cdot(0+1) = n > 1$$

つまり $x = 1$ のとき $f(x)$ は極小値をとる その値は

$$f(1) = 1^n\left(\log 1 - \frac{1}{n}\right) = 1\cdot -\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$

よって 最小値は $f(1) = -\dfrac{1}{n}$

(2) $x^{n-2} > 0$ であるから $\log x = -\dfrac{1}{n-1}$ となることから $-e^{-\frac{1}{n-1}}$ $-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$x = e^{-\frac{1}{n-1}}$ となるよって変曲点は

$$\left(e^{-\frac{1}{n-1}},\ -\frac{2n-1}{n(n-1)}\cdot e^{-\frac{n}{n-1}}\right)$$

田坂れ子　2/2

(3)

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n-1}} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{2n-1}{n(n-1)} e^{-\frac{n}{n-1}} = 0$$

∴ 定点 $(1, 0)$ に限りなく近づく.