GOOD JOB!

曲線6

GOOD JOB!

関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e{-}x}{2}$ を考える。

(1) $f(x)$ の変曲点を求めよ。
(2) $f(x)$ のグラフを書け。
(3) $f(2x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ とで表せ。
(4) $f'(2x)$ を $f(x)$ で表せ。
(5) $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ を求めよ。
(6) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ の $x = 1$ における値を求めよ。

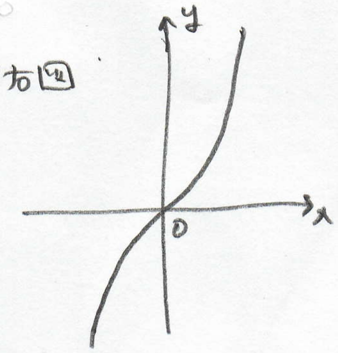
〔島根大〕

(1) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　$f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　$f''(x) = 0$ とすると $x = 0$

変曲点は $(0, 0)$

(2) $f'(x) > 0$ であるから $f(x)$ は単調に増加

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ よりグラフは右図のようになる



(3) $f(2x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot 2$

$= 2f'(x)f(x)$　∴ $\underline{f(2x) = 2f'(x)f(x)}$

(4) $f'(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{1}{2}\{(e^x - e^{-x})^2 + 2\} = \dfrac{1}{2}\left[\{2f(x)\}^2 + 2\right]$

$= 2\{f(x)\}^2 + 1$　∴ $\underline{f'(2x) = 2\{f(x)\}^2 + 1}$

(5) e^x をもとめる事を考える　$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ として変形すると

$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \rightarrow (e^x - y)^2 - y^2 - 1 = 0$

$e^x - y = \pm\sqrt{y^2+1}$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$　$e^x > 0$ より

$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$

∴ $\underline{g(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})}$

(6) $g'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

∴ $\underline{g'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

GOOD JOB!

GOOD JOB!