3C 曲線7

関数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ が表わす曲線を C とする。

(1) 曲線 C のグラフをかけ。

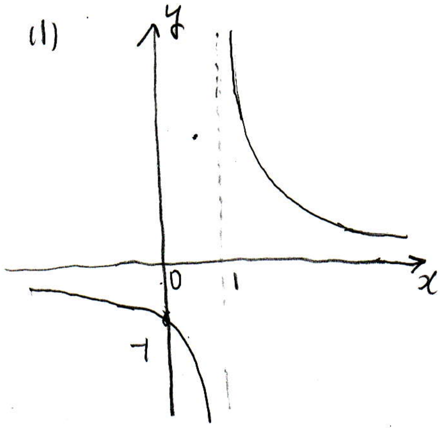
(2) 点 $(2, 0)$ を通り，傾き a の直線を直線 L とする。直線 L の方程式をかけ。

(3) 直線 L が曲線 C と異なる 2 つの共有点をもつための a の範囲を求めよ。このときの共有点の座標を求めよ。

(4) 直線 L が曲線 C と接するとき，a の値と接点の座標を求めよ。

〔山形大〕

(1)



(2)

$y=a(x-2)$ …①

$\therefore\ y=ax-2a$

(3) …① と $y=\dfrac{1}{x-1}$ の交点を考える

$a(x-2)=\dfrac{1}{x-1}$ として

$a(x-2)(x-1)=1 \rightarrow ax^2-3ax+2a-1=0$ の実数解の個数を判別式 D によって求めると

$9a^2-4a(2a-1)>0$ のとき異なる2つの実数解をもつので

$a^2+4a>0$

$a(a+4)>0$ $\quad\therefore\ a>0,\ a<-4$

接点の座標は

$$\left(\frac{3a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2a},\ \frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)$$ 複号同順

(4) 接するときは (3) の判別式で $a(a+4)=0$ とすればよいので $a=-4$ のとき

このとき (3) より接点は $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ 以上より

$a=-4$ 接点 $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$