3c 曲線 8

xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ によって $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ と表される。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ における接線を l, 原点 O を通り傾き $\tan\theta$ の直線を m とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) 媒介変数 t を消去することにより，x と y の関係式を求めよ。

(2) 接線 l の方程式を求めよ。また，接線 l と x 軸との交点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 接線 l と直線 m との交点を R とするとき，R の座標を θ を用いて表せ。また，θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，交点 R の軌跡を求めよ。

(4) 交点 R の軌跡と曲線 C の概形を同じ xy 平面上に図示せよ。

〔岩手大〕

(1) $x^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t$　$y^{\frac{2}{3}} = \sin^2 t$　$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

(2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$　$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$

$\therefore$ $y = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - \cos^3\theta) + \sin^3\theta$

l の式は $y = -\tan\theta\, x + \sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta$

$y = -\tan\theta\, x + \sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin^3\theta$

$\therefore$ $y = -\tan\theta\, x + \sin\theta$

これより

$\tan\theta\, x = \sin\theta$　$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x = \sin\theta$　より $x = \cos\theta$　$\mathrm{Q}(\cos\theta, 0)$

(3) $y = \tan\theta\, x \cdots m$　$-\tan\theta x + \sin\theta = \tan\theta x$ を解くと

$2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x = \sin\theta$　$x = \frac{\cos\theta}{2}$, $y = \frac{\sin\theta}{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より　$\cos\theta = 2x$　$\sin\theta = 2y$ を代入して

$4x^2 + 4y^2 = 1$　$\therefore$ $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

答 $\begin{cases} \mathrm{R}\left(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2}\right) \text{で} \\ \text{Rは 半径 } \frac{1}{2} \text{ の円弧を描く} \\ \because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (0, \frac{1}{2})\ (\frac{1}{2}, 0) \text{ は含まない} \end{cases}$

$x > 0,\ y > 0$

曲線8

(4)

(a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ と (b) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ の式を考える

(a) のグラフ上の点は $(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ でこれを (b) に代入すると

$$\cos^6\theta+\sin^6\theta=\frac{1}{4}$$

$$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\frac{1}{4}$$

$$1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$ より
$4\sin^2\theta\cos^2\theta=\sin^2 2\theta$ であるから

$$1-\frac{3}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

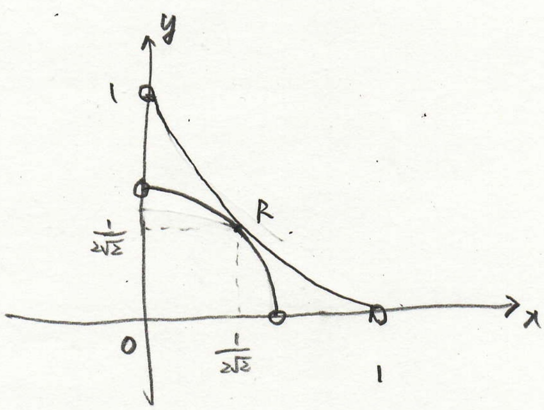
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\frac{3}{4}\sin2\theta<1$ であるから $1-\frac{3}{4}\sin2\theta\geqq\frac{1}{4}$

等号は $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき成り立つ。つまり $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき2つのグラフは接する

(2) より

$\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}<0$ であり $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ は $x>0$, $y>0$ では減少する

∴



$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき

R $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$