道のり1

次の式で表される曲線の長さを求めなさい。

$$x = t^3 \cos\frac{3}{t},\ y = t^3 \sin\frac{3}{t}\ (2 \leqq t \leqq 3)$$

〔学習院大〕

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \cos\frac{3}{t} - t^3 \sin\frac{3}{t} \cdot -\frac{3}{t^2}$$

$$= 3t^2 \cos\frac{3}{t} + 3t \sin\frac{3}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 \sin\frac{3}{t} + t^3 \cos\frac{3}{t} \cdot -\frac{3}{t^2}$$

$$= 3t^2 \sin\frac{3}{t} - 3t \cos\frac{3}{t}$$

求める長さを L とすると

$$L = \int_2^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_2^3 \sqrt{9t^4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 9t^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\, dt \quad (\because \theta = \frac{3}{t})$$

$$= \int_2^3 \sqrt{9t^4 + 9t^2}\, dt = \int_2^3 3t\sqrt{t^2+1}\, dt$$

$$3t(t^2+1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow (t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left[(t^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3$$

$$= 10^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}$$

$$= 10\sqrt{10} - 5\sqrt{5}$$

答 $10\sqrt{10} - 5\sqrt{5}$