道のり5

平面上を動く点Pの座標が, 時刻tの関数として次のように表されている。

$3x = t^3 + 6t^2,\ 3y = 2t^3 - 3t^2$

(1) 点Pが座標 (27, 9) を通るときの速度を求めなさい。

(2) 点Pが時刻0からaまでの間に通過する道のりを求めよ。

〔北見工大〕

(1) $x = \dfrac{t^3+6t^2}{3}$　$y = \dfrac{2t^3-3t^2}{3}$ より

$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ より　$\vec{v} = (t^2+4t,\ 2t^2-2t)$

$x=27$ のとき　$27 = \dfrac{t^3+6t^2}{3}$ より　$t^3+6t^2-81=0$. これより

$(t-3)(t^2+9t+27)=0$　$\therefore t=3$

ゆえに　$\vec{v} = (21, 12)$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{(t^2+4t)^2+(2t^2-2t)^2}\,dt = \int_0^a t\sqrt{(t+4)^2+(2t-2)^2}\,dt$

$\displaystyle= \int_0^a t\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2+4}\,dt \cdots ①$　$t^2+4=u$ とおくと　$2t\,dt = du$　$t\,dt = \frac{1}{2}du$

$t\ 0\to a\ :\ u\ 4\to a^2+4$ より

$\displaystyle ① = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_4^{a^2+4}\sqrt{u}\,du = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{a^2+4}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{3}\left\{(a^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right\}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{5}}{3}\left\{(a^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right\}$