[illegible]

[illegible]

平面上の動点Pの時刻tにおける速度ベクトルが$\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{\cos t}{t^2+1}, \dfrac{\sin t}{t^2+1}\right)$で与えられるとき1,

(1) 点Pの時刻tにおける加速度ベクトルの大きさを求めよ。

(2) 点Pが時刻0から$\sqrt{3}$までの間に動いた道のりを求めよ。

〔信州大〕

(1) $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{(t^2+1)\sin t + 2t\cos t}{(t^2+1)^2},\ \frac{(t^2+1)\cos t - 2t\sin t}{(t^2+1)^2}\right)$$

よって $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ の大きさは

$$\sqrt{\left(-\frac{(t^2+1)\sin t + 2t\cos t}{(t^2+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{(t^2+1)\cos t - 2t\sin t}{(t^2+1)^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(t^2+1)^2\sin^2 t + \cancel{4t(t^2+1)\sin t\cos t} + 4t^2\cos^2 t + (t^2+1)\cos^2 t - \cancel{4t(t^2+1)\sin t\cos t} + 4t^2\sin^2 t}{(t^2+1)^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(t^2+1)^2 + 4t^2}{(t^2+1)^4}} = \frac{\sqrt{t^4+6t^2+1}}{(t^2+1)^2}$$

(2) $$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t^2+1}\right)^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt \cdots ①$$

$t = \tan\theta$ とおくと $dt = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ $t\ 0 \to \sqrt{3}$, $\theta\ 0 \to \dfrac{\pi}{3}$

∴ ①は $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\dfrac{\pi}{3}$