送り7

放物線 $y=x^2$ 上を動く点Pがあって, 時刻 $t=0$ のときの位置は原点である。また, 時刻 t のときPの速度ベクトルの x 成分は $\sin t$ である。速度ベクトルの y 成分が最大となるときのPの位置を求めよ。
また, そのときにおけるPの速度ベクトルおよび加速度ベクトルを求めよ。〔東北大〕

$\dfrac{dx}{dt}=\sin t \qquad x=-\cos t+C$

$t=0$ のとき $x=0$ より $\quad C=1 \quad \therefore\ x=1-\cos t$

従って

$y=(1-\cos t)^2$ $\quad t\geqq 0$ ではPは周期 2π の周期運動

$\dfrac{dy}{dt}=2(1-\cos t)\sin t$ よりこれを $f(t)$ としておく

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\cos t \qquad \dfrac{d^2y}{dt^2}=2(\cos t-\cos 2t)=f'(t)$

$f'(t)=2(\cos t-2\cos^2 t+1)=2(1-\cos t)(1+2\cos t)$ より

$0\leqq t<2\pi$ とすると

$f(t)$ は $t=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ で極値をとる

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	/

よって最大値は $t=\frac{2}{3}\pi$ のときで $P\left(1-\cos\frac{2}{3}\pi,\ \left(1-\cos\frac{2}{3}\pi\right)^2\right)$ より

$P\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$ このとき速度ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

加速度ベクトル $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ は $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$