近の18

xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(x, y)$ の時刻 t における座標を $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$ とし, この点の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ とする。ただし, 角の単位はラジアンとする。2 点 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(-3, 0)$ をとる。このとき, 次の各問に答えよ。

(1) $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$ から, t を消去して, x と y の関係式を求めよ。

(2) 速度 $\vec{v}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\vec{v}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{v}$ および $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\vec{v}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\vec{v}$ を t を用いて表せ。

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}, \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の大きさをそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ とするとき, 等式 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 5 - 3\cos t$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 5 + 3\cos t$ が成り立つことを証明せよ。

(5) $\angle\mathrm{APB}$ の 2 等分線の方向ベクトルは, $\vec{v}$ に垂直であることを証明せよ。

〔山形大〕

(1) $\cos t = \dfrac{x}{5}$ $\sin t = \dfrac{y}{4}$ $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ より

$\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$ ∴ $\underline{\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -5\sin t$ $\dfrac{dy}{dt} = 4\cos t$ ∴ $\underline{\vec{v} = (-5\sin t, 4\cos t)}$

(3) $\overrightarrow{PA} = (3 - x, -y)$ $\overrightarrow{PB} = (-3 - x, -y)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{v} = -15\sin t + 5x\sin t - 4y\cos t = -15\sin t + 25\sin t\cos t - 16\sin t\cos t = 9\sin t\cos t - 15\sin t$

$\overrightarrow{PB}\cdot\vec{v} = 15\sin t + 5x\sin t - 4y\cos t = 15\sin t + 25\sin t\cos t - 16\sin t\cos t = 9\sin t\cos t + 15\sin t$

∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\vec{v} = 3\sin t(3\cos t - 5)$ $\overrightarrow{PB}\cdot\vec{v} = 3\sin t(3\cos t + 5)$

(4) $\overrightarrow{PA} = (3 - x, -y)$ より $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(3 - x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(3 - 5\cos t)^2 + (-4\sin t)^2}$

となり根号の中は $9 - 30\cos t + 25\cos^2 t + 16\sin^2 t$

$= 9 - 30\cos t + 9\cos^2 t + 16$

$= (5 - 3\cos t)^2$ ∴ $\overrightarrow{PA} = \sqrt{(5 - 3\cos t)^2}$ となるので $\overrightarrow{PA} = 5 - 3\cos t$

$\overrightarrow{PB} = (-3 - x, -y)$ より $\overrightarrow{PB} = \sqrt{(-3 - x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(-3 - 5\cos t)^2 + (-4\sin t)^2}$

となり根号の中は $9 + 30\cos t + 25\cos^2 t + 16\sin^2 t$

$= 9 + 30\cos t + 9\cos^2 t + 16$

$= (5 + 3\cos t)^2$ ∴ $\overrightarrow{PB} = \sqrt{(5 + 3\cos t)^2}$ となり $\overrightarrow{PB} = 5 + 3\cos t$

(5) $\angle APB$ の 2 等分線の方向ベクトルの 1 つとして

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PA}}{PA} + \dfrac{\overrightarrow{PB}}{PB} = \dfrac{\overrightarrow{PA}}{5 - 3\cos t} + \dfrac{\overrightarrow{PB}}{5 + 3\cos t}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{v}}{5 - 3\cos t} + \dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\vec{v}}{5 + 3\cos t}$ (3) より $\dfrac{-3\sin t(5 - 3\cos t)}{5 - 3\cos t} + \dfrac{3\sin t(3\cos t + 5)}{5 + 3\cos t} = -3\sin t + 3\sin t = 0$

よって $\angle APB$ の 2 等分線の方向ベクトルは, $\vec{v}$ に垂直である.