ごうかく!

無限級数 1

辺の長さが 1 の正三角形 ABC に対して，円 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ を次のように定める。

(i) $\triangle$ABC に内接する円を S_1 とする。

(ii) 線分 AB, 線分 AC と円 S_1 に接する円を S_2 とする。

(iii) 線分 AB, 線分 AC と円 S_2 に接する円で S_1 以外のものを S_3 とする。

(iv) 線分 AB, 線分 AC と円 S_3 に接する円で S_2 以外のものを S_4 とする。

(v) 以下同様に円 $S_5, S_6, \cdots$ を定める。

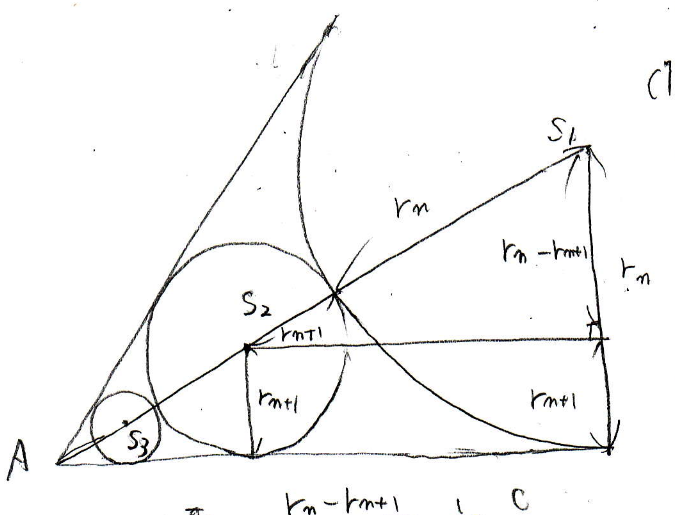
次の問に答えよ。

(1) 円 S_1 の面積 m_1 を求めよ。

(2) 円 S_2 の面積 m_2 を求めよ。

(3) 円 S_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の面積を m_n とするとき $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ の和を求めよ。

〔青山学院大〕



$\therefore \sin\frac{\pi}{6} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 2r_n - 2r_{n+1} = r_n + r_{n+1} \\ r_n = 3r_{n+1} \\ r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n \end{cases}$

(1) △ABCに内接する円 S_1 の半径を r とすると

$\frac{1}{2} r \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$　　$r = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore$ $\underline{m_1 = \frac{1}{12}\pi}$ //

(2) 中心は常に正三角形の重心にある。

S_1 の半径が $\frac{\sqrt{3}}{6}$ より S_1 の中心と点Aとの線分の長さは $\frac{\sqrt{3}}{3}$ であるから S_2 の内接する正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$ の $\frac{1}{3}$ 倍が S_2 の半径より $\frac{\sqrt{3}}{18}$　$\therefore$　$m_2 = \frac{3}{324}\pi$

$\underline{m_2 = \frac{1}{108}\pi}$ //

(3) 半径は $\frac{1}{3}$ 倍ずつされていくので面積は $\frac{1}{9}$ 倍ずつ一定の割合で小さくなっていくから

$m_n = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \pi$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\pi = \frac{\frac{1}{12}\pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{32}\pi$

$\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{8}{9}} \times \frac{3\pi}{32}$

ごうかく!
ごうかく!