ごうかく!

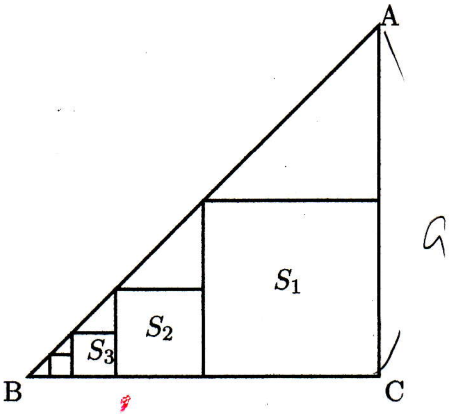
ごうかく!

無限級数

直角 2 等辺三角形 ABC 内に, 右の図のように正方形 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ が限りなく並んでいる。ただし, $\angle C = 90°$, AC$= a$ である。

(1) $S_1, S_2, S_3, \cdots$ の面積の総和を求めよ。

(2) $\angle A = 60°$ の直角三角形 ABC なら, 面積の総和はどうか。



〔横浜国大〕

(1)

$S_1 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$

$S_2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 = \frac{1}{16}a^2$

$S_3 = \left(\frac{1}{8}a\right)^2 = \frac{1}{64}a^2$

$\vdots$

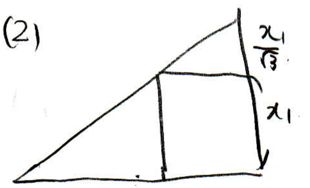
$S_n = a^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{4}a^2 \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{4}a^2 = \frac{4}{3}$

$= \frac{1}{3}a^2$ //

(2)



$\frac{x_1}{\sqrt{3}} + x_1 = a$

$x_1(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3}a$

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}a$

$\frac{x_2}{\sqrt{3}} + x_2 = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}a$

$x_2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})^2}a = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 a$

$x_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^3 a$

$S_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 a^2,\ S_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^4 a^2,\ S_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^6 a^2$

$S_n = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{2n} = a^2\left(\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{3a^2}{4+2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4+2\sqrt{3}}}$

$= \frac{3a^2}{1+2\sqrt{3}}$ //