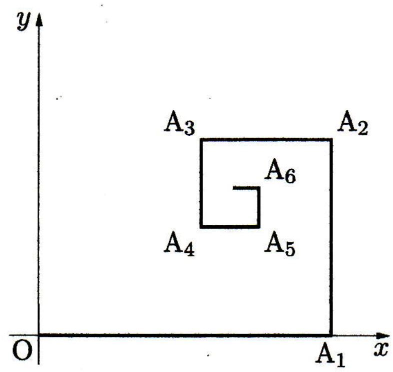
$OA_1=1$, $A_1A_2=\frac{2}{3}$, $A_2A_3=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $A_3A_4=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\cdots$ と無限に続けていくと，折れ線の端はどんな点に近づいていくか。その点の座標を求めよ。



〔神奈川大〕

$A_1(1,0)$, $A_2\left(1,\frac{2}{3}\right)$, $A_3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2, \frac{2}{3}\right)$, $A_4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2, \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$

$A_5\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4, \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$, $A_6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4, \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)$

$x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

一般項 $(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} \to \left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^1-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots$

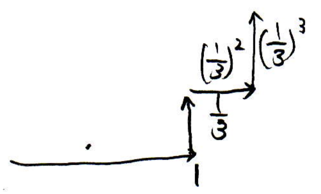
一般項 $(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \to \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\cdot \frac{2}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{6}{13}$

$\therefore \left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$

ごうかく!

ごうかく!

【類題】座標平面で, 動点 A が原点 O を出発して, x 軸の正の方向に 1 だけ進み, 次に y 軸の正の方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ進み, さらに x 軸の正の方向に $\dfrac{1}{3^2}$ だけ進む。このような運動を限りなく続けるとき, 点 A の極限の位置を求めよ。



$$x = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots$$

一般項 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$

$$y = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots$$

一般項 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \to \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{8}$$

$\therefore \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$