

a, b は実数とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a^n - b^n)$ が収束するとき、点 (a, b) が存在する範囲を求め、これを図示せよ。 [お茶ノ水大]

i) $a=b$ のときは 0 に収束

ii) $a \neq b$ のとき

① $a \neq 1, b \neq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n (a^k - b^k) = \frac{a(1-a^{n+1})}{1-a} - \frac{b(1-b^{n+1})}{1-b}$$

と収束する収束条件は

$|a| < 1, |b| < 1$ のとき

② $a \neq 1, b = 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n (a^k - b^k) = \frac{a(1-a^{n+1})}{1-a} - n \text{ 発散}$$

③ $a = 1, b \neq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n (a^k - b^k) = n - \frac{b(1-b^{n+1})}{1-b} \text{ 発散}$$

④

