無限級数14

訂正あり

初項7, 公差2の等差数列の一般項を a_n とし, 初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の一般項を b_n とする。数列 $\{c_n\}$ について,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

が成立するとき,

(1) 一般項 c_n を求めよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ の和を求めよ。

〔東北大〕

(1) $a_n = 2n+5$, $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ である

数列 $\{a_n b_n c_n\}$ の一般項は $n \geqq 2$ で,

$S_n = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

$-)\ S_{n-1} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

わすれない!

$a_n b_n c_n = (n+1)(n+2)$ $\quad \because c_1 = 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot c_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad c_1 = \frac{24}{7}$

$(2n+5)\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot c_n = (n+1)(n+2)$

$c_n = \frac{3^n(n+1)(n+2)}{2n+5} \quad \because c_1 = \frac{24}{7}$

(2)

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{3^k(k+1)(k+2)} \quad \because \frac{1}{c_1} = \frac{7}{24}$

右辺の式を変形すると

$\frac{1}{3^k}\left\{\frac{3}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right\} = \frac{1}{3^{k-1}(k+1)} - \frac{1}{3^k(k+2)} \quad n \geqq 2$

$n=2, 3, \cdots$ として加えていくと

$\frac{1}{3 \cdot 3} - \cancel{\frac{1}{9 \cdot 4}} + \cancel{\frac{1}{9 \cdot 4}} - \cancel{\frac{1}{27 \cdot 5}} + \cancel{\frac{1}{27 \cdot 5}} - \cdots + \cancel{\frac{1}{3^{k-1}(k+1)}} - \frac{1}{3^k(k+2)}$

$\therefore$ $k=1$ のときもふくめると

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \frac{7}{24} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^n(n+2)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_k} = \frac{7}{24} + \frac{1}{9} = \frac{29}{72}$

$\frac{29}{72}$

今のオレにはムリかも…