ごうかく

無限級数 15

無限等比級数の和 $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots\cdots$ を求めよ。

また，この級数の第 n 項までの和を S_n とするとき，$|S - S_n| < \dfrac{1}{10^4}$ となるような最小の n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。〔大阪電通大〕

一般項 a_n

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

∴ $|S - S_n| < \dfrac{1}{10^4}$ より

$$\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\right| = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

$\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}} < \dfrac{1}{10^4}$ より $2\cdot 3^{n-1} > 10^4$

$\log_{10} 2\cdot 3^{n-1} > \log 10^4$

$\log_{10} 2 + (n-1)\log 3 > 4$

$0.301 + 0.4771(n-1) > 4$

$0.4771n > 4.1761$

$n > 8.753\cdots$

よって最小の n は 9