



(1) 無限級数 $x + x^2(x-2) + x^3(x-2)^2 + \dots + x^n(x-2)^{n-1} + \dots$ が収束するような x の範囲は である。

(2) (1) の級数の和が $\frac{1}{4}$ に等しいときの x の値は である。

[近畿大]

(1) 一般項 a_n

$$a_n = x \{x(x-2)\}^{n-1} \text{ とおす}$$

i) $x=0$ のとき

和は 0 に収束する

ii)

$$|x(x-2)| < 1 \text{ と収束する。つまり}$$

$$-1 < x(x-2) < 1$$

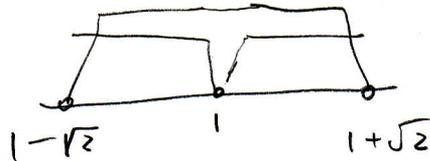
$$x^2 - 2x - 1 < 0$$

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(x-1)^2 > 0$$

$$x \neq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ と i), ii) より

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 \quad 1 < x < 1 + \sqrt{2}$$

(2)

a_n の和 S は

$$S = \frac{x}{1 - x(x-2)} = \frac{1}{4} \text{ とおす} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} x = 1 - x(x-2)$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 2$$

$$x+1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{2} - 1$$

ii) より

$$x = \sqrt{2} - 1$$