無限級数17

H30.10.4 訂正

次のような2つの無限級数 (A), (B) がある。

(A) $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$

(B) $(a_1 + 1) + (a_2 + c) + \cdots\cdots + (a_n + c^{n-1}) + \cdots\cdots$

(A) の和が $4a_1$ であるとき, 次の問に答えよ。ただし, $a_1 \neq 0$ とする。

(1) (A) の公比と c の値を求めよ。

(2) (B) の和が6のとき, (B) の公比と a_1 を求めよ。

〔北見工大〕

(1) $\dfrac{a_1}{1-r} = 4a_1$ (rは公比) より　　$a_n = a_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$a_1 = 4a_1(1-r)$　$a_1 \neq 0$ より

$1 = 4(1-r)$

$4r = 3$,　$r = \dfrac{3}{4}$

(B)の無限級数において (第n項)^2 = (第(n−1)項) × (第(n+1)項)

が成立するので

$(a_k + c^{k-1})^2 = (a_{k-1} + c^{k-2})(a_{k+1} + c^k)$ となり

$\cancel{a_k^2} + 2a_k c^{k-1} + \cancel{c^{2k-2}} = \cancel{a_k^2} + a_{k-1}c^k + a_{k+1}c^{k-2} + \cancel{c^{2k-2}}$ …①

$a_n = a_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ より ①は

$2a_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}c^{k-1} = a_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-2}c^k + a_1\left(\dfrac{3}{4}\right)^k c^{k-2}$　両辺 a_1 と $\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$, c^k でわると

$2\cdot\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{c} = \dfrac{16}{9} + \dfrac{1}{c^2}$　$\dfrac{1}{c} = x$ とおいて整理すると $\dfrac{8}{3}x = \dfrac{16}{9} + x^2$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$　$(3x-4)^2 = 0$　$x = \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{c}$ より $c = \dfrac{3}{4}$　以上より $r = \dfrac{3}{4}$, $c = \dfrac{3}{4}$

(2) (B)の公比をr'とすると

$(a_1+1)r' = a_2 + c$ より

$r' = \dfrac{a_2+c}{a_1+1}$ = $r' = \dfrac{\frac{3}{4}a_1 + \frac{3}{4}}{a_1+1} = \dfrac{\frac{3}{4}\cancel{(a_1+1)}}{\cancel{a_1+1}} = \dfrac{3}{4}$　$r' = \dfrac{3}{4}$

$\because (a_1+1) \neq 0$

和を求めると

$\dfrac{a_1+1}{1-\frac{3}{4}} = 6$ なので　$4a_1 + 4 = 6$

$4a_1 = 2$　$a_1 = \dfrac{1}{2}$　　$a_1 = \dfrac{1}{2}$, 公比 $\dfrac{3}{4}$