要級数21

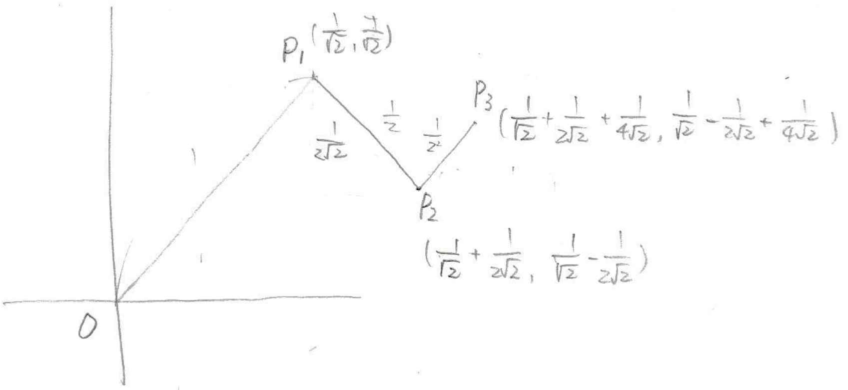
xy 平面上で, 原点 O を出発して, x 軸の正の方向と 45° をなす方向に 1 だけ進んだ点を P_1 とする。P_1 において直角に右折して $\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2 とする。P_2 において直角に左折して $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進んだ点を P_3 とする。以下同様にして, n が奇数のときは P_n において直角に右折して, n が偶数のときは P_n において直角に左折してそれぞれ $\dfrac{1}{2^n}$ だけ進んだ点を P_{n+1} とする。n を限りなく大きくしたとき, P_n は定点 A に限りなく近づく。

(1) $\mathrm{OP}_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を求めよ。

(2) 定点 A の座標を求めよ。

〔愛知工大〕

(1)



P_nP_{n+1} の一般項は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ なので

$$OP_1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_nP_{n+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

(2)

P_n の x 座標は 一般項 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

P_n の y 座標は 一般項 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

∴ 定点Aは $\underline{\underline{\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}}$

ミスが多い