無限級数28

級数 $S_n=\dfrac{4}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{5}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 第 k 項を $\dfrac{A}{k(k+1)}+\dfrac{B}{k(k+1)(k+2)}$ ($A,\ B$ は k を含まない定数) と表すとき, $A,\ B$ を求めよ。

(2) S_n を n の簡単な式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

〔東京電機大〕

(1) $A=1\ ,\ B=1$

(2) (1)より 一般項 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ となるので

$S_n=S'_n+S''_n$ として

$S'_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$S''_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

とすると $S'=1-\dfrac{1}{n+1}$

$S''=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

$S_n=1-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

$\therefore S_n=\dfrac{5}{4}-\dfrac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{4}-\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}\right\}$

$=\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{5}{4}$ //