3C 無限級数 29

数列 $\{a_n\}$ が次の式で与えられている。

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{2n}}{2n-1} - nx^{n-1} + 1 \right) dx \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を n で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値を求めよ。

〔神奈川大〕

(1)

$$a_n = \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} - x^n + x \right]_0^1$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

(2)

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ より}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{\frac{1}{2}}$$