無限級数 8

無限級数 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+2x^2)}+\dfrac{x^2}{(1+2x^2)(1+3x^2)}+\cdots$ の和を求めよ。

〔水産大〕

例えば

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(1+2x^2)}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}$$

$$\frac{x^2}{(1+2x^2)(1+3x^2)}=\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+3x^2}$$ であるから

$$\frac{x^2}{\{1+(n-1)x^2\}(1+nx^2)}=\frac{1}{1+(n-1)x^2}-\frac{1}{1+nx^2}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{1+(k-1)x^2}-\frac{1}{1+kx^2}\right\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+3x^2}\right)$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{1+(n-1)x^2}-\frac{1}{1+nx^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{1+nx^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{1+nx^2}$$ より

$$\begin{cases} x=0 \text{ なら} & \lim_{n\to\infty}S_n=0 \\ x\neq 0 \text{ なら} & \lim_{n\to\infty}S_n=1 \end{cases}$$